کلاس تقارن تانسوری

محمّدرضا پورنکی

گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه تهران

و مرکز تحقیقات فیزیک نظری و ریاضیات

E-mail: pournaki@vax.ipm.ac.ir

چکیده

ایسایی شور در رسالهٔ دکتری خود مطالعاتی در مورد نمایش‌های تحویل‌ناپذیر گروه‌های خطی عام انجام داده است. شاید بتوان گفت در اینجا بوده است که برای اوّلین بار تصویری مقدماتی از کلاس تقارن تانسوری ظاهر شده است. در واقع کلاس تقارن تانسوری تعمیمی از فضای گراسمان می‌باشد که در اواخر قرن نوزدهم کاملاً شناخته شده بود و لذا می‌توان گفت مطالعهٔ روی کلاس تقارن تانسوری سابقه‌ای حدود یک قرن دارد، امّا در سالهای اخیر مطالعه روی آنها یکی از پر جاذبه‌ترین موضوع‌های جبر چندخطی بوده است و ریاضیدانان زیادی روی ردهٔ وسیعی از مسایل که با کلاس تقارن تانسوری ارتباط دارند کار کرده‌اند. در این مقالهٔ توصیفی، ضمن آشنا کردن خواننده با مفاهیم مرتبط با کلاس تقارن تانسوری، مسایل حل نشده‌ای را مطرح خواهیم کرد. همچنین با ارائه منابعی در پایان، راه را برای علاقه‌مندان به تحقیق هموار خواهیم ساخت.

۱ مقدمه

در این بخش به یادآوری چند مفهوم از نظریهٔ سرشت گروه‌های متناهی و جبر چندخطی که در بررسی مفاهیم مربوط به کلاس تقارن تانسوری به آنها نیاز داریم، می‌پردازیم.

نظریهٔ سرشت گروه‌های متناهی

فرض کنیم G یک گروه متناهی باشد و V فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$. $GL(V,\mathbb{C})$ را گروه خطی عام؛ گروه عملگرهای خطی وارونپذیر روی V؛ در نظر می‌گیریم. به هر همریختی $D : G \to GL(V,\mathbb{C})$ یک

نمایش از گروه G با فضای نمایشی V یا به اختصار یک نمایش از گروه G می‌گوییم و بعد فضای V یعنی m را درجهٔ این نمایش می‌نامیم. به کمک نمایش داده شده‌ای از G مانند $D : G \to GL(V, \mathbb{C})$ می‌توانیم V را به یک $\mathbb{C}G$ مدول تبدیل کنیم. برای این منظور جمع را همان جمعی در نظر می‌گیریم که V به‌عنوان $\mathbb{C}$ فضای برداری به آن مجهز است. ضرب در اسکالر، یعنی $\cdot : V \times \mathbb{C}G \to V$ را نیز روی اعضای پایه‌ای $\mathbb{C}$ جبر $\mathbb{C}G$ که همان اعضای G هستند به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$v.g = (v)D(g).$$

به‌راحتی می‌توانیم بررسی کنیم V به یک $\mathbb{C}G$ مدول تبدیل شده است. توجه می‌کنیم که برعکس این کار نیز میسر است. یعنی اگر V یک $\mathbb{C}G$ مدول باشد، می‌توانیم یک نمایش از گروه G با فضای نمایشی V به‌دست آوریم. برای این منظور $D : G \to GL(V, \mathbb{C})$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(v)D(g) = v.g.$$

به‌راحتی می‌توانیم بررسی کنیم D یک نمایش از گروه G است.

با توجه به آنچه در بالا به آن اشاره کردیم، می‌توانیم بگوییم مطالعهٔ نمایش‌های گروه G با مطالعهٔ $\mathbb{C}G$ مدول‌ها ارتباطی نزدیک دارد. ردهٔ مهمی از $\mathbb{C}G$ مدول‌ها، $\mathbb{C}G$ مدول‌های تحویل‌ناپذیر هستند، یعنی $\mathbb{C}G$ مدول‌هایی که $\mathbb{C}G$ زیرمدول غیربدیهی ندارند. نقش این موجودات در مطالعهٔ $\mathbb{C}G$ مدول‌ها مانند نقش اعداد اوّل در مطالعهٔ اعداد صحیح است و در نتیجه می‌توانیم حدس بزنیم که نمایش‌های گروه G که از چنین موجوداتی به‌دست می‌آیند باید نقش اساسی داشته باشند. این چنین نیز است، یعنی نمایش $D : G \to GL(V, \mathbb{C})$ از گروه G را تحویل‌ناپذیر می‌نامیم هرگاه D، فضای V را به یک $\mathbb{C}G$ مدول تحویل ناپذیر تبدیل کند. این نمایش‌های گروه G نقش ویژه‌ای در نظریهٔ سرشت گروه‌های متناهی ایفا می‌کنند.

برای نمایش داده شدهٔ $D : G \to GL(V, \mathbb{C})$ ازگروه G تابع $\chi : G \to \mathbb{C}$ با ضابطهٔ $\chi(g) = trD(g)$ را نظیر می‌کنیم. توجه می‌کنیم که برای هر $g \in G$، $D(g) \in GL(V, \mathbb{C})$ یک عملگر خطی وارونپذیر روی V است و منظور از $trD(g)$، یعنی اثر این عملگر خطی. در ضمن $\chi(۱)$ نیز همان درجهٔ نمایش خواهد بود، یعنی $\chi(۱) = m$.

χی نظیر شده به نمایش D را سرشتی از گروه G می‌نامیم. هرگاه D تحویل‌ناپذیر باشد، به χ سرشت تحویل‌ناپذیر از G می‌گوییم. تاکنون روابط عجیبی به کمک سرشتهای تحویل‌ناپذیر گروه G به‌دست آمده‌اند و نظریهٔ سرشت گروه‌های متناهی به یکی از پرجاذبه‌ترین شاخه‌های گروه‌های متناهی تبدیل شده است، تا جایی که تکنیک‌های موجود در آن حتی ابزاری برای حمله به مسایل مجرد در نظریهٔ گروه‌های متناهی شده‌اند. می‌توانیم برای نمونه به رابطهٔ عجیبی که به رابطهٔ تعامد تعمیم یافته موسوم است اشاره کنیم. اگر χ سرشتی تحویل‌ناپذیر از گروه متناهی G باشد، در این صورت رابطهٔ تعامد تعمیم یافته چنین است:

$$\sum_{g \in G} \chi(g^{-۱}h)\chi(g) = \frac{|G|}{\chi(۱)}\chi(h) \qquad (۱)$$

که در آن منظور از $\sum\limits_{g\in G}$، یعنی مجموع روی اعضای گروه متناهی G که تعداد اعضای آن $|G|$ است و عضو خنثی در آن مساوی ۱. همچنین برای سرشت تحویل‌ناپذیر χ داریم:

$$\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)} \qquad (۲)$$

که در آن $\overline{\chi(g)}$ مزدوج مختلط $\chi(g)$ است. برای بررسی عمیق نظریهٔ سرشت گروه‌های متناهی خواننده را به مراجع [5] و [7] ارجاع می‌دهیم. این نظریه در مطالعهٔ کلاس تقارن تانسوری نقش ابزارکار را دارد.

جبر چندخطی

فرض کنیم V و U فضاهای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ باشند. $\overset{n}{\times} V$ را حاصلضرب دکارتی V با خود به تعداد n بار در نظر می‌گیریم. تابع $\phi : \overset{n}{\times} V \to U$ را یک تابع n خطی می‌نامیم هرگاه ϕ نسبت به هر مؤلفه خطی باشد، یعنی برای هر $c, d \in \mathbb{C}$ و $v_i, v_i' \in V$:

$$\phi(v_۱, \ldots, cv_i + dv_i', \ldots, v_n) = c\phi(v_۱, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + d\phi(v_۱, \ldots, v_i', \ldots, v_n).$$

اکنون یکی از $\mathbb{C}$ فضاهای برداری را که به کمک V ساخته می‌شود و با مفهوم تابع n خطی ارتباطی نزدیک دارد معرفی می‌کنیم. این فضا در جبر چندخطی نقش کلیدی دارد. برای این منظورگیریم F گروه آبلی آزاد روی مجموعهٔ $\overset{n}{\times} V$ باشد. مجموعهٔ B متشکل ازکلیهٔ اعضایی به‌صورت

$$(v_۱, \ldots, cv_i + dv_i', \ldots, v_n) - c(v_۱, \ldots, v_i, \ldots, v_n) - d(v_۱, \ldots, v_i', \ldots, v_n)$$

$c, d \in \mathbb{C}$ و $v_i, v_i' \in V$، را در نظر می‌گیریم و K را زیرگروهی از F فرض می‌کنیم که توسط B تولید می‌شود. گروه خارج قسمتی F/K را حاصلضرب تانسوری V با خود به تعداد n بار می‌نامیم و آنرا با $\overset{n}{\otimes} V$ نمایش می‌دهیم. برای اعضای $v_۱$، ...، v_n از V، عضو $(v_۱, \ldots, v_n) + K \in \overset{n}{\otimes} V$ را با $v_۱ \otimes \cdots \otimes v_n$ یا $v^\otimes$ نمایش می‌دهیم و آنرا یک تانسور تجزیه‌پذیر می‌نامیم. ضرب در اسکالر $c \in \mathbb{C}$ را نیز روی $\overset{n}{\otimes} V$ به‌صورت

$$c(v_۱ \otimes \cdots \otimes v_n) = cv_۱ \otimes \cdots \otimes v_n = \cdots = v_۱ \otimes \cdots \otimes cv_n$$

تعریف می‌کنیم و بدین ترتیب $\overset{n}{\otimes} V$ را به یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ تبدیل می‌کنیم. اگر V یک $\mathbb{C}$ فضای برداری m بعدی با پایه $\{e_۱, \ldots, e_m\}$ فرض شود، $\overset{n}{\otimes} V$ یک $\mathbb{C}$ فضای برداری m^n بعدی است و پایهٔ آن از اعضایی به‌صورت $e_{\alpha_۱} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_n} = e_\alpha^\otimes$ تشکیل شده است که در آن $\alpha = (\alpha_۱, \ldots, \alpha_n)$ این خاصیت را دارد که $۱ \leq \alpha_i \leq m$. به‌راحتی می‌توانیم بررسی کنیم که برای هر $c, d \in \mathbb{C}$ و $v_i, v_i' \in V$ تساوی

$$v_۱ \otimes \cdots \otimes (cv_i + dv_i') \otimes \cdots \otimes v_n = c(v_۱ \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_n) + d(v_۱ \otimes \cdots \otimes v_i' \otimes \cdots \otimes v_n)$$

برقرار است و این حاکی از آن است که تابع $\otimes : \overset{n}{\times} V \to \overset{n}{\otimes} V$ با ضابطهٔ $\otimes(v_۱, \ldots, v_n) = v_۱ \otimes \cdots \otimes v_n$ یک تابع n خطی است و به‌راحتی می‌توانیم ثابت کنیم برای هر $\mathbb{C}$ فضای برداری متناهی بعد W و هر تابع n

خطی $\psi : \overset{n}{\times} V \to W$، تبدیل خطی منحصر به فرد $f : \overset{n}{\otimes} V \to W$ موجود است که نمودار زیر را جابه‌جایی می‌کند، یعنی $f\otimes = \psi$.

$$\begin{array}{ccc} \overset{n}{\times} V & \xrightarrow{\otimes} & \overset{n}{\otimes} V \\ \psi \downarrow & \swarrow f & \\ W & & \end{array}$$

این خاصیت را خاصیت جهانی حاصلضرب تانسوری می‌نامیم. برای مطالعهٔ عمیق مفاهیم مربوط به جبر چند خطی خواننده را به مراجع [8] و [10] ارجاع می‌دهیم. اکنون آماده‌ایم کلاس تقارن تانسوری را که در واقع زیرفضایی از $\overset{n}{\otimes} V$ می‌باشد معرفی کنیم.

۲ کلاس تقارن تانسوری

از این بخش تا پایان مقاله، فرض می‌کنیم V فضای برداری m بعدی روی $\mathbb{C}$ باشد. همچنین فرض می‌کنیم G زیرگروهی از گروه متقارن $\$_n$ باشد و χ سرشتی تحویل ناپذیر از G. فرض کنیم $\sigma \in G$ و تابع $A(\sigma) : \overset{n}{\times} V \to \overset{n}{\otimes} V$ را با ضابطهٔ $A(\sigma)(v_۱, \ldots, v_n) = v_{\sigma^{-۱}(۱)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-۱}(n)}$ تعریف می‌کنیم. برای هر $c, d \in \mathbb{C}$ و $v_i, v_i' \in V$:

$$A(\sigma)(v_۱, \ldots, cv_i + dv_i', \ldots, v_n) = cA(\sigma)(v_۱, \ldots, v_i, \ldots, v_n) + dA(\sigma)(v_۱, \ldots, v_i', \ldots, v_n),$$

یعنی $A(\sigma)$ تابعی n خطی است. بنابر خاصیت جهانی حاصلضرب تانسوری عملگر خطی منحصر به فرد $P(\sigma) : \overset{n}{\otimes} V \to \overset{n}{\otimes} V$ موجود است که نمودار زیر را جابه‌جایی می‌کند، یعنی $P(\sigma)\otimes = A(\sigma)$.

$$\begin{array}{ccc} \overset{n}{\times} V & \xrightarrow{\otimes} & \overset{n}{\otimes} V \\ A(\sigma) \downarrow & \swarrow P(\sigma) & \\ \overset{n}{\otimes} V & & \end{array}$$

این نیز به این معنی است که عمل $P(\sigma)$ روی تانسورهای تجزیه‌پذیر به‌صورت زیر است:

$$P(\sigma)(v_۱ \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{\sigma^{-۱}(۱)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-۱}(n)}.$$

اکنون می‌خواهیم عملگری خطی بسازیم که تمام عناصر G (و نه فقط σی خاص بالا) در آن درگیر باشند. مناسب‌ترین کار برای انجام این منظور در نظر گرفتن میانگین وزنی $P(\sigma)$ها می‌باشد. یعنی عملگر خطی $T(G, \chi) : \overset{n}{\otimes} V \to \overset{n}{\otimes} V$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(G, \chi) = \frac{\chi(۱)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) P(\sigma).$$

عملگر خطی بالا نقش کلیدی در نظریهٔ مربوط به کلاس تقارن تانسوری دارد.

تعریف. فرض کنیم U یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ باشد. تابع n خطی $\phi : \overset{n}{\times} V \to U$ را متقارن نسبت به G و χ می‌نامیم هرگاه برای هر v_1، ...، v_n از V

$$\frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma)\phi(v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-1}(n)}) = \phi(v_1, \ldots, v_n).$$

مثال ۱. نشان می‌دهیم تابع $\phi : \overset{n}{\times} V \to \overset{n}{\otimes} V$ با ضابطهٔ $\phi(v_1, \ldots, v_n) = T(G,\chi)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$ یک تابع n خطی متقارن نسبت به G و χ است. خطی بودن $T(G,\chi)$، به‌وضوح n خطی بودن ϕ را نتیجه می‌دهد. اکنون برای هر v_1، ...، v_n از V داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma)\phi(v_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, v_{\sigma^{-1}(n)}) &= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) T(G,\chi)(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}) \\
&= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) \left(\frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\tau \in G} \chi(\tau) P(\tau)(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}) \right) \\
&= \frac{\chi(1)^2}{|G|^2} \sum_{\sigma \in G} \sum_{\tau \in G} \chi(\sigma)\chi(\tau) v_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(1))} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(\tau^{-1}(n))} \\
&= \frac{\chi(1)^2}{|G|^2} \sum_{\lambda \in G} \left(\sum_{\tau \in G} \chi(\tau^{-1}\lambda)\chi(\tau) \right) v_{\lambda^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\lambda^{-1}(n)} \\
&= \frac{\chi(1)^2}{|G|^2} \sum_{\lambda \in G} \left(\frac{|G|}{\chi(1)} \chi(\lambda) \right) v_{\lambda^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\lambda^{-1}(n)} \qquad \text{بنابر (۱)} \\
&= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\lambda \in G} \chi(\lambda) v_{\lambda^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\lambda^{-1}(n)} \\
&= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\lambda \in G} \chi(\lambda) P(\lambda)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \\
&= T(G,\chi)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \\
&= \phi(v_1, \ldots, v_n),
\end{aligned}$$

و لذا ϕ یک تابع n خطی متقارن نسبت به G و χ است.

تعریف. فرض کنیم S یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ باشد. S را یک کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ می‌نامیم هرگاه تابع n خطی $\phi : \overset{n}{\times} V \to S$ که متقارن نسبت به G و χ می‌باشد موجود باشد طوری‌که:

۱) $\langle Im\phi \rangle = S$،

۲) برای هر $\mathbb{C}$ فضای برداری متناهی بعد U و هر تابع n خطی $\psi : \overset{n}{\times} V \to U$ که نسبت به G و χ متقارن است، تبدیل خطی منحصر به فرد $f : S \to U$ موجود باشد که نمودار زیر را جابه‌جایی کند، یعنی $f\phi = \psi$.

$$\begin{array}{ccc}
\overset{n}{\times} V & \xrightarrow{\phi} & S \\
\psi \downarrow & \swarrow f & \\
U & &
\end{array}$$

قضیهٔ ۱. هر دو کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ به‌عنوان $\mathbb{C}$ فضای برداری یکریخت هستند.

برهان. گیریم S و S' هر دو کلاس‌های تقارن تانسوری وابسته به G و χ باشند. پس توابع n خطی $\phi : \overset{n}{\times} V \to S$ و $\phi' : \overset{n}{\times} V \to S'$ که نسبت به G و χ متقارن هستند موجودند و برای آنها شرایط ۱ و ۲ی تعریف بالا برقرار است. از این که S کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ است، شرط ۲ی تعریف نتیجه می‌دهد که تبدیل خطی منحصر به‌فرد $f : S \to S'$ موجود است که نمودار زیر را جابه‌جایی می‌کند، یعنی $f\phi = \phi'$.

$$\begin{array}{ccc} \overset{n}{\times} V & \xrightarrow{\phi} & S \\ \phi' \downarrow & \swarrow f & \\ S' & & \end{array}$$

از طرفی با توجه به اینکه S' کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ است، شرط ۲ی تعریف نتیجه می‌دهد که تبدیل خطی منحصر به‌فرد $g : S' \to S$ موجود است که نمودار زیر را جابه‌جایی می‌کند، یعنی $g\phi' = \phi$.

$$\begin{array}{ccc} \overset{n}{\times} V & \xrightarrow{\phi'} & S' \\ \phi \downarrow & \swarrow g & \\ S & & \end{array}$$

لذا $fg = 1_{S'}$ و $gf = 1_S$ و در نتیجه f یکریختی است و لذا $S \cong S'$. $\square$

قضیهٔ ۲. کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ موجود است.

برهان. قرار می‌دهیم $S = ImT(G, \chi)$. واضح است که S یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ است. همچنین $\phi : \overset{n}{\times} V \to S$ را با ضابطهٔ $\phi(v_1, \ldots, v_n) = T(G, \chi)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$ تعریف می‌کنیم. بنابر مثال ۱، ϕ تابعی n خطی و متقارن نسبت به G و χ است. با توجه به اینکه $T(G, \chi)$ عملگری خطی است لذا $S = \langle Im\phi \rangle = \langle ImT(G, \chi) \rangle = ImT(G, \chi)$ و شرط ۱ تعریف برقرار است.

اکنون فرض می‌کنیم U فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ و $\psi : \overset{n}{\times} V \to U$ یک تابع n خطی باشد که نسبت به G و χ متقارن است. بنابر خاصیت جهانی حاصلضرب تانسوری تبدیل خطی منحصر به‌فرد $h : \overset{n}{\otimes} V \to U$ موجود است که نمودار زیر را جابه‌جایی می‌کند، یعنی $h\otimes = \psi$.

$$\begin{array}{ccc} \overset{n}{\times} V & \xrightarrow{\otimes} & \overset{n}{\otimes} V \\ \psi \downarrow & \swarrow h & \\ U & & \end{array}$$

حال فرض می‌کنیم $h|_S = f$. به وضوح f یک تبدیل خطی از S به U است و برای هر v_1، …، v_n از V

داریم:

$$\begin{aligned} f\phi(v_1,\dots,v_n) &= h\phi(v_1,\dots,v_n) \\ &= h(T(G,\chi)(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)) \\ &= h(\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\sigma)(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)) \\ &= h(\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(n)}) \\ &= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)h(v_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma^{-1}(n)}) \\ &= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)h\otimes(v_{\sigma^{-1}(1)},\dots,v_{\sigma^{-1}(n)}) \\ &= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)\psi(v_{\sigma^{-1}(1)},\dots,v_{\sigma^{-1}(n)}) \\ &= \psi(v_1,\dots,v_n), \end{aligned}$$

پس $f\phi=\psi$. از طرفی اگر $f':S\to U$ تبدیل خطی دیگری باشد که $\psi=f'\phi$، آنگاه برای هر $s\in S$، $s=T(G,\chi)(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)$، داریم:

$$\begin{aligned} f'(s) &= f'(T(G,\chi)(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)) \\ &= f'\phi(v_1,\dots,v_n) \\ &= \psi(v_1,\dots,v_n) \\ &= f\phi(v_1,\dots,v_n) \\ &= f(T(G,\chi)(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)) \\ &= f(s). \end{aligned}$$

لذا $f=f'$. یعنی $f:S\to U$ تبدیل خطی منحصر به‌فردی است که نمودار زیر را جابه‌جایی می‌کند.

$$\begin{array}{ccc} \overset{n}{\times}V & \xrightarrow{\phi} & S \\ \psi\downarrow & \swarrow f & \\ U & & \end{array}$$

پس شرط ۲ تعریف نیز برقرار است و لذا S کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ است. $\square$

با توجه به قضیه‌های ۱ و ۲ از این پس می‌توانیم S معرفی شده در قضیهٔ ۲ را کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ در نظر بگیریم و لذا می‌توانیم تعریف زیر را به‌عنوان تعریف معادل دیگری از کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ ارائه دهیم.

تعریف. تصویر $\overset{n}{\otimes}V$ تحت $T(G,\chi)$ را که زیرفضایی از $\overset{n}{\otimes}V$ است کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ می‌نامیم و آنرا با $V_\chi^n(G)$ نمایش می‌دهیم، یعنی $V_\chi^n(G) = ImT(G,\chi)$. همچنین تصویر تانسور تجزیه‌پذیر $v^\otimes = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ از $\overset{n}{\otimes}V$ تحت $T(G,\chi)$، یعنی $T(G,\chi)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)$ که عضوی از $V_\chi^n(G)$ است را با $v^* = v_1 * \cdots * v_n$ نمایش می‌دهیم و به آن یک تانسور تجزیه‌پذیر متقارن نسبت به G و χ می‌گوییم.

فرض کنیم $\$_n$ گروه متقارن باشد، ϵ را نیز سرشت متناوب $\$_n$ در نظر می‌گیریم، یعنی $\epsilon : \$_n \to \mathbb{C}$ با ضابطهٔ

$$\epsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } \sigma \text{ زوج باشد:} \\ -1 & \text{اگر } \sigma \text{ فرد باشد:} \end{cases}$$

در این صورت کلاس تقارن تانسوری وابسته به $\$_n$ و ϵ یعنی $V_\epsilon^n(\$_n)$ همان فضای گراسمان است و معمولاً آنرا با $\wedge_\epsilon^n(\$_n)$ نمایش می‌دهیم. همچنین تصویر $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ تحت $T(\$_n,\epsilon)$، را بجای $v_1 * \cdots * v_n$ با $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ نشان می‌دهیم.

اکنون می‌خواهیم فرمول بعد کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ را که مارکوس (نگاه کنید به [8]) آنرا محاسبه کرده است بیان کنیم. برای اثباتی قابل فهم از این فرمول، اشاره به نمادگذاری و قضیهٔ زیر مفید خواهد بود. مجموعهٔ تمام nتایی‌های مرتب که مؤلفه‌های آنها از اعداد ۱، ۲، ... ، m تشکیل شده است را با Γ_m^n نمایش می‌دهیم، یعنی

$$\Gamma_m^n = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid 1 \le \alpha_i \le m\}.$$

قضیهٔ ۳. برای گروه G و مجموعهٔ Γ_m^n، تابع $\cdot : G \times \Gamma_m^n \to \Gamma_m^n$ را با ضابطهٔ $\sigma.\alpha = (\alpha_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma^{-1}(n)})$ تعریف می‌کنیم. در این صورت G با $\cdot$ روی Γ_m^n عمل می‌کند.

برهان. توجه می‌کنیم که برای هر $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Gamma_m^n$ و هر $\sigma, \tau \in G$ داریم:

$$\begin{aligned} 1.\alpha &= (\alpha_{1^{-1}(1)}, \ldots, \alpha_{1^{-1}(n)}) \\ &= (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \\ &= \alpha, \\ \sigma.(\tau.\alpha) &= \sigma.(\alpha_{\tau^{-1}(1)}, \ldots, \alpha_{\tau^{-1}(n)}) \\ &= (\alpha_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(1))}, \ldots, \alpha_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(n))}) \\ &= (\alpha_{(\sigma\tau)^{-1}(1)}, \ldots, \alpha_{(\sigma\tau)^{-1}(n)}) \\ &= \sigma\tau.\alpha, \end{aligned}$$

و لذا G روی Γ_m^n عمل می‌کند. $\square$

اکنون آماده‌ایم فرمول بعد مربوط به $V_\chi^n(G)$ را ثابت کنیم.

قضیهٔ ۴. بعد کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ، $\dim V_\chi^n(G)$، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید که در آن $c(\sigma)$ تعداد دورهای موجود در تجزیهٔ دوری σ، با احتساب دورهای به‌طول یک است.

$$\dim V_\chi^n(G)=\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)m^{c(\sigma)}$$

لم ۱. برای هر $\sigma\in G$، اثر عملگر خطی $P(\sigma):\overset{n}{\otimes}V\to\overset{n}{\otimes}V$ برابر است با $m^{c(\sigma)}$، یعنی $trP(\sigma)=m^{c(\sigma)}$.

برهان. فرض می‌کنیم $B=\{e_i\mid 1\le i\le m\}$ پایه‌ای برای V باشد، در نتیجه $B^\otimes=\{e_\alpha^\otimes\mid\alpha\in\Gamma_m^n\}$ پایه‌ای برای $\overset{n}{\otimes}V$ خواهد بود. ماتریس $P(\sigma)$ را نسبت به پایهٔ $B^\otimes$ در نظر می‌گیریم. مجموع درایه‌های روی قطر اصلی این ماتریس برابر $trP(\sigma)$ می‌باشد. برای یافتن درایه‌های روی قطر اصلی این ماتریس به‌صورت زیر عمل می‌کنیم[1]. فرض می‌کنیم $\{f_i\mid 1\le i\le m\}$ پایهٔ دوگان B باشد، در این صورت $\{h_\beta\mid\beta\in\Gamma_m^n\}$ پایهٔ دوگان $B^\otimes$ است که در آن $h_\beta:\overset{n}{\otimes}V\to\mathbb{C}$ تابعک خطی می‌باشد که عمل آن روی تانسورهای تجزیه‌پذیر به این صورت است: $h_\beta(v_1\otimes\cdots\otimes v_n)=f_{\beta_1}(v_1)\dots f_{\beta_n}(v_n)$. لذا درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس $P(\sigma)$ نسبت به پایهٔ $B^\otimes$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}h_\alpha(P(\sigma)(e_\alpha^\otimes))&=h_\alpha(e_{\alpha_{\sigma^{-1}(1)}}\otimes\cdots\otimes e_{\alpha_{\sigma^{-1}(n)}})\\&=f_{\alpha_1}(e_{\alpha_{\sigma^{-1}(1)}})\cdots f_{\alpha_n}(e_{\alpha_{\sigma^{-1}(n)}}).\end{aligned}$$

اگر $\sigma.\alpha=\alpha$ آنگاه $h_\alpha(P(\sigma)(e_\alpha^\otimes))=1$ و در غیر این صورت $h_\alpha(P(\sigma)(e_\alpha^\otimes))=0$. پس $trP(\sigma)$ برابر است با تعداد $\alpha\in\Gamma_m^n$هایی که $\sigma.\alpha=\alpha$. فرض کنیم σ در تجزیهٔ به دورهای مجزا، با احتساب دورهای به‌طول یک، به $c(\sigma)$ دور تجزیه شده باشد:

$$\sigma=(t_1^1\dots t_{l_1}^1)\cdots(t_1^{c(\sigma)}\dots t_{l_{c(\sigma)}}^{c(\sigma)})$$

امّا شرط لازم و کافی برای اینکه $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ دارای این خاصیت باشد که $\sigma.\alpha=\alpha$ این است که α طوری تعریف شده باشد که $\alpha_{t_1^1}=\cdots=\alpha_{t_{l_1}^1}$ و ... و $\alpha_{t_1^{c(\sigma)}}=\cdots=\alpha_{t_{l_{c(\sigma)}}^{c(\sigma)}}$.

پس در تعریف α با خاصیت ذکر شده، برای تعریف هر کدام از $\alpha_{t_1^1}=\cdots=\alpha_{t_{l_1}^1}$ و ... و $\alpha_{t_1^{c(\sigma)}}=\cdots=\alpha_{t_{l_{c(\sigma)}}^{c(\sigma)}}$، m انتخاب داریم و لذا برای α، $m^{c(\sigma)}$ انتخاب موجود است، یعنی $trP(\sigma)=m^{c(\sigma)}$. □

لم ۲. برای هر $\sigma,\tau\in G$ داریم $P(\sigma)P(\tau)=P(\sigma\tau)$.

۱ـ اگر $T:V\to V$ یک عملگر خطی باشد و $\{e_1,\dots,e_m\}$ پایه‌ای برای V، آنگاه درایه (i,j) ماتریس T نسبت به این پایه برابر است با $f_i(T(e_j))$ که در آن $\{f_1,\dots,f_m\}$ پایهٔ دوگان پایهٔ ذکر شده برای V است.

برهان. برای هر $v_1, \ldots, v_n$ از V

$$\begin{aligned} P(\sigma)P(\tau)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= P(\sigma)(v_{\tau^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\tau^{-1}(n)}) \\ &= v_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(1))} \otimes \cdots \otimes v_{\tau^{-1}(\sigma^{-1}(n))} \\ &= v_{(\sigma\tau)^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{(\sigma\tau)^{-1}(n)} \\ &= P(\sigma\tau)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n), \end{aligned}$$

و لذا حکم ثابت می‌شود. $\square$

برهان قضیهٔ ۴. عملگر خطی $T(G,\chi) : \overset{n}{\otimes} V \to \overset{n}{\otimes} V$، عملگری خودتوان است، زیرا

$$\begin{aligned} T(G,\chi)^2 &= \left(\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\sigma)\right)\left(\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\tau\in G}\chi(\tau)P(\tau)\right) \\ &= \frac{\chi(1)^2}{|G|^2}\sum_{\sigma\in G}\sum_{\tau\in G}\chi(\sigma)\chi(\tau)P(\sigma)P(\tau) \\ &= \frac{\chi(1)^2}{|G|^2}\sum_{\sigma\in G}\sum_{\tau\in G}\chi(\sigma)\chi(\tau)P(\sigma\tau) \qquad \text{بنابر لم ۲} \\ &= \frac{\chi(1)^2}{|G|^2}\sum_{\lambda\in G}\left(\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1}\lambda)\chi(\sigma)\right)P(\lambda) \\ &= \frac{\chi(1)^2}{|G|^2}\sum_{\lambda\in G}\left(\frac{|G|}{\chi(1)}\chi(\lambda)\right)P(\lambda) \qquad \text{بنابر (۱)} \\ &= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\lambda\in G}\chi(\lambda)P(\lambda) \\ &= T(G,\chi). \end{aligned}$$

خودتوان بودن عملگر خطی $T(G,\chi)$، نتیجه می‌دهد که رتبه و اثر آن برابر است و لذا بنابر لم ۱ می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \dim V_\chi^n(G) &= \dim Im T(G,\chi) \\ &= Rank\ T(G,\chi) \\ &= tr T(G,\chi) \\ &= tr\left(\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)P(\sigma)\right) \\ &= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma) tr P(\sigma) \\ &= \frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma)m^{c(\sigma)}. \quad \square \end{aligned}$$

یکی از مسایل کاملاً طبیعی در مطالعهٔ یک فضای برداری مسأله صفر شدن و یا صفر نشدن آن فضا است. در مطالعهٔ کلاس تقارن تانسوری نیز این مسأله از همان ابتدا مطرح بوده است که به‌ازای چه Gها، و چه χهایی

$V_\chi^n(G)$ غیرصفر است. قابل توجه است که اشاره کنیم هنوز این مسأله حل نشده است[۱]، در واقع مسأله مطرح، آنقدر سخت است که خیلی اوقات حتی نمی‌توان مشخص کرد که برای G و χی داده شده‌ای، $V_\chi^n(G)$ غیرصفر است و یا نه، چه برسد به اینکه تمام G و χها که برای آنها $V_\chi^n(G)$ غیرصفر است را رده‌بندی کنیم. در نتیجه محققان در مورد این مسأله، صفر شدن و یا صفر نشدن $V_\chi^n(G)$ را به‌ازای گروهی معین و سرشتی تحویل‌ناپذیر از آن بررسی می‌کنند. یکی از راه‌های حمله به این مسأله پیدا کردن فرمول صریح بعد $V_\chi^n(G)$ برای G و χی داده شده است، زیرا شاید بتوان از روی فرمول بعد تشخیص داد که $V_\chi^n(G)$ صفر است یا نه. برای روشن شدن مطلب مثال زیر را می‌آوریم.

مثال ۲. فرض می‌کنیم π دوری به‌طول n در S_n باشد و قرار می‌دهیم $G = \langle \pi \rangle$ و $\chi = 1_G$ (1_G سرشتی تحویل‌ناپذیر از G است معروف به سرشت اصلی G و برای هر $g \in G$، $1_G(g) = 1$). در این صورت به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
\dim V_\chi^n(G) &= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) m^{c(\sigma)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in G} m^{c(\sigma)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} m^{c(\pi^j)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} m^{(n,j)} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(\frac{n}{d}) m^d,
\end{aligned}$$

که در آن ϕ تابع فی‌ـاویلر است.

فرمول بعد $\dim V_\chi^n(G) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(\frac{n}{d}) m^d$ به‌وضوح نشان می‌دهد که $V_\chi^n(G)$ برای G و χی داده شده در این مثال ناصفر است. امّا این روش برای بررسی اینکه به‌ازای G و χ داده شده‌ای آیا $V_\chi^n(G)$ صفر است و یا نه، به روشی کارساز تبدیل نشد[۲]، زیرا اغلب موارد یا اصلاً نمی‌توان فرمول بعد را به‌طور صریح مشخص کرد و یا اینکه فرمول صریح به‌دست آمده آنقدر پیچیده است که نمی‌توان از روی آن صفر بودن و یا نبودنش را تشخیص

۱ـ در سال ۱۹۷۶ مریس در مقاله‌ای (نگاه کنید به [9]) شرط لازم و کافی برای غیرصفر بودن $V_\chi^n(G)$ پیدا کرده است. مریس برای این منظور از دوگانی بین نمایش‌های S_n و نمایش‌های چندجمله‌ای $GL(V, \mathbb{C})$ استفاده کرده است، ولیکن به کمک شرط معادل به‌دست آمده نیز نتوانسته‌اند تمام G و χهایی را که به ازای آنها $V_\chi^n(G)$ غیرصفر است پیدا کنند.

۲ـ به علت پیچیدگی محاسبهٔ فرمول بعد به‌طور صریح به‌ازای G و χی داده شده و ارتباط آن به مطالب مربوط به نظریهٔ اعداد، محاسبهٔ فرمول بعد به‌طور صریح، به یک مسألهٔ پر هیجان تبدیل شده است (صرف‌نظر از اینکه آیا به کمک آن می‌توان صفر شدن و یا صفر نشدن کلاس تقارن تانسوری وابسته را به‌دست آورد یا نه). مثال ۲ به همراه یک فرمول بعد دیگر موضوع مقالهٔ ۵ صفحه‌ای [1] را تشکیل داده‌اند. همچنین در مقالات [2]، [3]، [4]، [6] و [12] نیز فرمول صریح بعد برای کلاس تقارن تانسوری وابسته به گروه‌هایی معین محاسبه شده‌اند.

داد. در نتیجه ردهٔ دیگری از مطالعات شروع شد تا ابزارهایی مناسب‌تر برای حمله به این مسأله به‌دست آید. آنچه در زیر به آن اشاره می‌کنیم توضیح در مورد یکی از این ابزارهای حمله به مسأله مطرح می‌باشد.

عمل گروه G روی مجموعهٔ Γ_m^n را که قبلاً به آن اشاره کردیم در نظر می‌گیریم. $G_\alpha = \{\sigma \in G \mid \sigma.\alpha = \alpha\}$ را نیز پایدارساز α تحت این عمل در نظر می‌گیریم. برای یک لحظه V را به یک ضرب داخلی مجهز می‌کنیم و لذا یک ضرب داخلی روی $\overset{n}{\otimes} V$ به‌صورت $\langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \rangle = \prod_{i=1}^{n} \langle u_i | v_i \rangle$ القاء می‌شود که تحدید آن به $V_\chi^n(G)$، کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ را به یک فضای ضرب داخلی بدل می‌کند. اکنون گیریم $\{e_1, \ldots, e_m\}$ پایه‌ای متعامد و یکّه برای V باشد. برای $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Gamma_m^n$ که دارای خاصیت $\sum_{\sigma \in G_\alpha} \chi(\sigma) \neq 0$ است، ثابت می‌کنیم $e_\alpha^* = T(G,\chi)(e_\alpha^\otimes) \neq o$ و برای این منظور به دو لم زیر نیاز داریم.

لم ۳. $T(G,\chi)$ یک عملگر خطی خودالحاق است.

برهان. توجه می‌کنیم که برای هر u_1، ...، u_n و v_1، ...، v_n از V و هر $\sigma \in G$

$$\begin{aligned}
\langle P(\sigma)(u_1 \otimes \cdots \otimes u_n) \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \rangle &= \langle u_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma^{-1}(n)} \mid v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \rangle \\
&= \prod_{i=1}^{n} \langle u_{\sigma^{-1}(i)} \mid v_i \rangle \\
&= \prod_{i=1}^{n} \langle u_i \mid v_{\sigma(i)} \rangle \\
&= \langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mid v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)} \rangle \\
&= \langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \mid P(\sigma^{-1})(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \rangle
\end{aligned}$$

و لذا $P(\sigma)^* = P(\sigma^{-1})$ در نتیجه

$$\begin{aligned}
T(G,\chi)^* &= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \overline{\chi(\sigma)} P(\sigma)^* \\
&= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \overline{\chi(\sigma)} P(\sigma^{-1}) \\
&= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1}) P(\sigma^{-1}) \qquad \text{بنابر (۲)} \\
&= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma) P(\sigma) \\
&= T(G,\chi).
\end{aligned}$$

یعنی عملگر $T(G,\chi)$ عملگری خودالحاق است. □

لم ۴. $\|e_\alpha^*\|^2 = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma \in G_\alpha} \chi(\sigma)$ که در آن $\| \|$ نرم القاء شده از ضرب داخلی است که V را به آن مجهز کرده‌ایم.

برهان.

$$
\begin{aligned}
\|e^*_\alpha\|^2 &= \langle e^*_\alpha \mid e^*_\alpha \rangle \\
&= \langle T(G,\chi)(e^\otimes_\alpha) \mid T(G,\chi)(e^\otimes_\alpha) \rangle \\
&= \langle T(G,\chi)^* T(G,\chi)(e^\otimes_\alpha) \mid e^\otimes_\alpha \rangle \\
&= \langle T(G,\chi)(e^\otimes_\alpha) \mid e^\otimes_\alpha \rangle \quad \text{بنابر لم ۳ و برهان قضیهٔ ۴} \\
&= \langle \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma) P(\sigma)(e^\otimes_\alpha) \mid e^\otimes_\alpha \rangle \\
&= \langle \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma) e_{\alpha_{\sigma^{-1}(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_{\sigma^{-1}(n)}} \mid e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_n} \rangle \\
&= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma\in G} \chi(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \langle e_{\alpha_{\sigma^{-1}(i)}} \mid e_{\alpha_i} \rangle \\
&= \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{\sigma\in G_\alpha} \chi(\sigma). \quad \square
\end{aligned}
$$

بنابر لم ۴، اگر $\sum_{\sigma\in G_\alpha} \chi(\sigma) \neq 0$، آنگاه $\|e^*_\alpha\| \neq 0$ و لذا $e^*_\alpha \neq o$. امّا $e^*_\alpha = T(G,\chi)(e^\otimes_\alpha) \in V^n_\chi(G)$ و در نتیجه $V^n_\chi(G) \neq o$.

یعنی برای G و χی داده شده، اگر بتوانیم $\alpha \in \Gamma^n_m$ پیدا کنیم که $\sum_{\sigma\in G_\alpha} \chi(\sigma) \neq 0$، آنگاه $V^n_\chi(G) \neq o$ و این ابزار دیگری است برای حل مسأله مطرح. برای روشن شدن مطلب، مثال زیر را می‌آوریم.

مثال ۳. فرض کنیم بعد فضای V، m؛ طوری باشد که $m \geq n$. G را زیرگروهی دلخواه از S_n در نظر می‌گیریم و χ را سرشتی تحویل‌ناپذیر از G. با توجه به شرط $m \geq n$، $\alpha = (1, 2, \ldots, n)$ عضوی از Γ^n_m است. چون تمام مؤلفه‌های α متمایز هستند، با توجه به عمل G روی Γ^n_m به‌وضوح به‌دست می‌آوریم $G_\alpha = \{1\}$ و در نتیجه $\sum_{\sigma\in G_\alpha} \chi(\sigma) = \chi(1) \neq 0$، یعنی $V^n_\chi(G) \neq o$.[1]

۳ مسایل تحقیقاتی

در بخش قبل سعی ما بر این بود که کلاس تقارن تانسوری را معرفی کنیم و در تمام مراحل این معرفی، با چند مثال ساده در مورد یک مسأله تحقیقاتی بحث کردیم. این مسأله، صفر شدن و یا صفر نشدن کلاس تقارن تانسوری وابسته به G و χ برای G و χی معینی بوده است. اکنون سه مسأله تحقیقاتی دیگر را معرفی می‌کنیم.

۱) برای v_1، ...، v_n از V تحت چه شرایطی $v_1 * \ldots * v_n = o$؟

۲) برای u_1، ...، u_n و v_1، ...، v_n از V تحت چه شرایطی $u_1 * \ldots * u_n = v_1 * \ldots * v_n$؟

۱ـ این مثال قضیه‌ای در مرجع [10] می‌باشد. در مقالات [4] و [11] به کمک این ابزار و ابزارهای دیگر صفر نشدن کلاس تقارن تانسوری وابسته به بعضی از گروه‌های معین بررسی شده است.

۳) V را فضای ضرب داخلی متناهی بعد روی $\mathbb{C}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت $\overset{n}{\otimes} V$ به یک فضای ضرب داخلی تبدیل می‌شود که تحدید آن به $V_\chi^n(G)$، این فضا را به فضای ضرب داخلی تبدیل می‌کند. تحت چه شرایطی، زیرمجموعهٔ S از Γ_m^n موجود است که $\{e_\alpha^* \mid \alpha \in S\}$ به یک پایهٔ متعامد برای $V_\chi^n(G)$ تبدیل می‌شود؟

در مقالات [3] و [6] نیز در مورد مسایل بالا، مطالبی ذکر شده است. همچنین مرجع [10] کتابی است مبسوط که در واقع جمع‌آوری مقالات مهم مربوط به کلاس تقارن تانسوری می‌باشد و توسط مریس که یکی از بنیانگذاران این شاخه از ریاضی است به رشتهٔ تحریر در آمده است. خواندن این کتاب را به تمامی محققینی که قصد انجام کار تحقیقاتی در کلاس تقارن تانسوری دارند توصیه می‌کنیم.

مراجع

[1] L. J. Cummings, *Cyclic Symmetry Classes*, J. Algebra **40** (1976), 401-405.

[2] M. R. Darafsheh, M. R. Pournaki, *On the Dimensions of Cyclic Symmetry Classes of Tensors*, J. Algebra **205** (1998), no. 1, 317-325.

[3] M. R. Darafsheh, M. R. Pournaki, *On the Orthogonal Basis of the Symmetry Classes of Tensors Associated with the Dicyclic Group*, Linear and Multilinear Algebra **47** (2000), no. 2, 137-149.

[4] M. R. Darafsheh, M. R. Pournaki, *Computation of the Dimensions of Symmetry Classes of Tensors Associated with the Finite two Dimensional Projective Special Linear Group*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **10** (2000), no. 3, 237-250.

[5] L. Dornhoff, "*Group Representation Theory*", Part I, Marcel Dekker, Inc., 1972.

[6] R. R. Holmes, T. Y. Tam, *Symmetry Classes of Tensors Associated with Certain Groups*, Linear and Multilinear Algebra **32** (1992), 21-31.

[7] I. M. Isaacs, "*Character Theory of Finite Groups*", Academic Press, New York, 1976.

[8] M. Marcus, "*Finite Dimensional Multilinear Algebra*", Part 1, Marcel Dekker, New York, 1973.

[9] R. Merris, *The Dimension of Certain Symmetry Classes of Tensors II,* Linear and Multilinear Algebra **4** (1976), 205-207.

[10] R. Merris, "*Multilinear Algebra*", Gordon and Breach Science Publishers, 1997.

[11] R. Merris, M. A. Rashid, *The Dimension of Certain Symmetry Classes of Tensors*, Linear and Multilinear Algebra **2** (1974), 245-248.

[12] T. Y. Tam, *On the Cyclic Symmetry Classes*, J. Algebra **182** (1996), 557-560.